COGITATIONES

Neue Extremalprobleme über konvexe Rotationskörper

Von H. Bieri*

Die konvexen Rotationskörper, Träger der drei Hauptmasszahlen V, F, M und ausgestattet mit einer ganzen Serie von Nebenmasszahlen, geben Anlass zu vielerlei Extremalproblemen. Manche davon sind gelöst, aber vieles bleibt noch zu tun[1].

Die Beschäftigung mit diesen Problemen ist an sich reizvoll. Wichtiger noch ist indessen, dass sie im Zusammenhang mit einem Hauptproblem über konvexe Rotationskörper stehen, ja gewissermassen als unerlässliche Durchgangsstation auf dem Wege zur Lösung des Hauptproblems angesehen werden können. In der vorliegenden Arbeit werden zwei Sätze über konvexe Rotationskörper mit festem Äquatorradius $r = 1$, fester Länge l und festem Volumen V bewiesen[2]. Die Nebenbedingungen bewirken, dass *nichttriviale Maxima* von F und M auftreten. Zwecks Entlastung des Textes sei vorweggenommen, dass die Extremalkörper der Teilklasse I angehören müssen (Äquatorradius am Rand).

Für die Hauptmasszahlen der Kegelstümpfe (im weitern Sinne) erhält man:

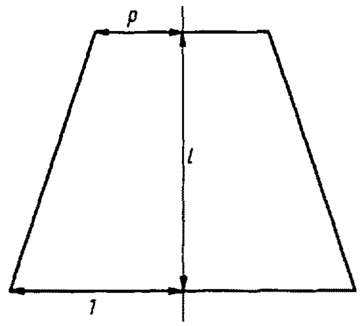

Abb. 1

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \frac{\pi l}{3}(1+p+p^2) \\ \overline{F} &= \pi\left[1+p^2+(1+p)\sqrt{(1-p)^2+l^2}\right] \\ \overline{M} &= \pi\left[l+\pi-(1-p)\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{1-p}\right)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Nach den Substitutionen

$$\overline{V} = \frac{\pi}{3}\cdot V;\ \overline{F} = \pi\cdot F;\ \overline{M} = \pi\cdot M\,. \qquad 1-p = l\cdot\mathfrak{Sin}\,\varphi;\ 0 \leqslant \mathfrak{Sin}\,\varphi \leqslant 1/l \tag{2}$$

gehen die Formeln (1) über in

$$\begin{aligned} V &= l(3-3\,l\cdot\mathfrak{Sin}\,\varphi+l^2\cdot\mathfrak{Sin}^2\,\varphi) \\ F &= 2+2\,l\cdot e^{-\varphi}-l^2\cdot\mathfrak{Sin}\,\varphi\cdot e^{-\varphi} \\ M &= l+\pi-l\cdot\mathfrak{Sin}\,\varphi\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\varphi}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

A. *Das (F, V)-Problem*

Es gilt der

Satz I: Unter allen konvexen Rotationskörpern von festem Aquatorradius $r=1$, fester Länge $l \geqslant (1+\sqrt{13})/2$ und festem Volumen V besitzen Kegelstümpfe im weitern Sinne und nur diese Körper grösste Oberfläche. F.

Beweis: Man erhält:

$$\dot{F} = -l\cdot e^{-2\varphi}(l+2\,e^{\varphi});\ \dot{V} = l^2\,\mathfrak{Cos}\,\varphi\,(2\,l\cdot\mathfrak{Sin}\,\varphi-3) < 0$$

$$\frac{dF}{dV} = \frac{2}{l}\cdot\frac{(l+2\,e^{\varphi})}{(l+3\,e^{\varphi}+3\,e^{3\varphi}-l\,e^{4\varphi})}$$

$$\frac{d^2F}{dV^2} = \frac{2}{l}\cdot\frac{1}{(l+3\,e^{\varphi}+3\,e^{3\varphi}-l\,e^{4\varphi})^2}\cdot\frac{1}{\dot{V}}\cdot e^{\varphi}\cdot\Phi(\varphi)\,; \tag{4}$$

$$\Phi(\varphi) \equiv [6\,l\cdot e^{4\varphi}+(4\,l^2-12)\,e^{3\varphi}-9\,l\cdot e^{2\varphi}-l]$$

Vermittelst der Substitution

$$4\,l^2-12 = 4\,\lambda\cdot l\ ;\quad 0 \leqslant l < \infty \qquad l = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+12}}{2}\ ;\ -\infty < \lambda < +\infty \tag{5}$$

erhält man die bequemere Form

$$\Phi(\varphi) \equiv l[6\,e^{4\varphi}+4\,\lambda\cdot e^{3}\ -9\,e^{2\varphi}-1]\ , \tag{6}$$

aus welcher unmittelbar gefolgert werden kann, dass für $\lambda \geqslant 1$, also für

$$l \geqslant \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

gemäss (4) die *Kegelstumpfkurve von unten konkav ist.*

Nun wenden wir uns den Doppelkegelstümpfen I_2 zu. Ihre Masszahlen berechnen sich zu

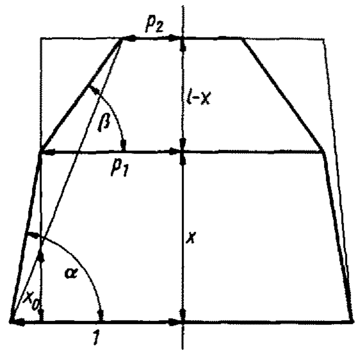

Abb. 2

$$F = 1+p_2^2+(1+p_1)\sqrt{(1-p_1)^2+x^2}+(p_1+p_2)\sqrt{(p_1-p_2)^2+(l-x)^2}$$
$$V = x\,(1+p_1-p_1p_2-p_2^2)+l\,(p_1^2+p_1p_2+p_2^2);\ x_0 \leqslant x \leqslant l \tag{7}$$

* Bern.

[1] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Springer-Verlag 1957). – H. Bieri, Exper. *14*, 113 (1958).

[2] Die Beschränkung auf $r = 1$ ist unwesentlich.

Es folgt:

$$F_x = [(1+p_1)\sin\alpha - (p_1+p_2)\sin\beta]\,;\quad V_x = \text{konstant.} \tag{8}$$

Mit wachsendem x nimmt α monoton zu, β monoton ab und daher dF/dv monoton zu. Dies aber hat zur Folge, dass die betrachtete Kurve im ganzen zulässigen Intervall von unten konvex ist und, wie Abb. 3 lehrt, kein Doppelkegelstumpf aus I_2 extremal sein kann.

Die angewendete Schlussweise ist, wie man sich leicht überzeugt, durchgreifend, und man sieht ein, dass kein Rotationskörper aus $I_n(n = 3, 4\ldots)$ extremal sein kann. *Infolgedessen ist der Kegelstumpf in der ganzen Klasse I und nach den einleitenden Ausführungen mit der genannten Einschränkung überhaupt extremal.*

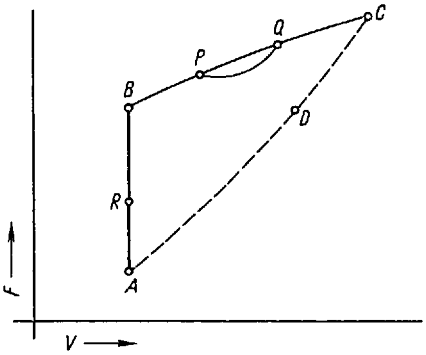

Abb. 3

A Symmetrischer Doppelkegel	C Zylinder
B Kegel	D Parallelkörper der Strecke
PQ Kegelstümpfe	R Unsymmetrischer Doppelkegel

B. *Das (M, V)-Problem*

Es gilt der

Satz II: Unter allen konvexen Rotationskörpern vom festen Äquatorradius $r = 1$, fester Länge $l \geqslant 6/\pi$ und festem Volumen V besitzen Kegelstümpfe im weitern Sinne und nur diese Körper grösstes Integral der mittlern Krümmung M.

Beweis: Man erhält:

$$\dot{M} = -l\cdot\mathfrak{Cos}\,\varphi\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\varphi}\right) + l\cdot\mathfrak{Tg}\,\varphi$$

$$\frac{dM}{dV} = \frac{1}{l}\cdot\frac{[(1+\mathfrak{Sin}^2\varphi)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\varphi}\right) - \mathfrak{Sin}\,\varphi]}{(1+\mathfrak{Sin}^2\varphi)\,(3-2\,l\cdot\mathfrak{Sin}\,\varphi)} \tag{9}$$

Mit Hilfe der Substitution $\mathfrak{Sin}\,\varphi = 1/z$; $\infty > z \geqslant l$ folgt weiter

$$\frac{dM}{dV} = \frac{1}{l}\cdot\frac{z\left[\operatorname{arctg} z - \frac{z}{1+z^2}\right]}{(3\,z-2\,l)} \quad \text{und sodann}$$

$$\frac{d^2M}{dV^2} = \frac{1}{l}\cdot \tag{10}$$
$$\cdot\frac{\left\{(3\,z-2\,l)\left[\frac{z}{1+z^2} + \operatorname{arctg} z - \frac{2\,z}{(1+z^2)^2}\right] - 3\left[z\cdot\operatorname{arctg} z - \frac{z^2}{1+z^2}\right]\right\}}{(3\,z-2\,l)^2\cdot V_z}$$

Das Vorzeichen von d^2M/dV^2 wird massgebend bestimmt durch den indefiniten Ausdruck

$$\Phi(z) \equiv \frac{3z^4 - lz^3 + lz}{(1+z^2)^2} - l\cdot\operatorname{arctg}(z) \tag{11}$$

Nun ist

$$\Phi(0) = 0;\ \Phi(\infty) = 3 - l\cdot\pi/2,\ \text{also}\ \Phi(\infty) < 0\ \text{für}\ l > 6/\pi;$$
$$\Phi'(z) = \frac{-4\,z^2(2\,l-3\,z)}{(1+z^2)^3},\ \text{also}\ \Phi'(z) > 0\ \text{für}\ l \leqslant z < \infty\,. \tag{12}$$

Aus (12) folgt aber sofort, dass die Kegelstumpfkurve für $l \geqslant 6/\pi$ beständig *von unten konkav* ist.

Gemäss Abb. 2 erhält man:

$$M = l+\pi - \left[(1-p_1)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-p_1}\right) + (p_1-p_2)\operatorname{arctg}\left(\frac{l-x}{p_1-p_2}\right)\right]$$
$$M_x = \sin^2\alpha - \sin^2\beta\,.$$

Die betrachtete Kurve ist also auch diesmal *von unten konvex*, und somit kann kein Doppelkegelstumpf extremal sein. Analog zum Satz I gelangt man nunmehr zum Resultat, *dass der Kegelstumpf in der vollen Klasse der mit den vorliegenden Nebenbedingungen verträglichen konvexen Rotationskörper grösstes M besitzt*[3].

Wegen $(1+\sqrt{3})/2 > 6/\pi$ besitzt der Kegelstumpf für $\infty > l \geqslant 6/\pi$ *simultan beide Extremaleigenschaften*, was für das Hauptproblem der konvexen Rotationskörper von Bedeutung ist[4–6].

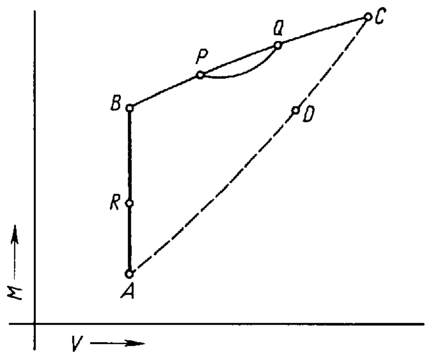

Abb. 4

A Symmetrischer Doppelkegel	C Zylinder
B Kegel	D Parallelkörper der Strecke
PQ Kegelstümpfe	R Unsymmetrischer Doppelkegel

Summary

It is shown in this note that every sufficiently elongated conic frustum assumes, if radius of equator r, length l and volume V of a convex body of revolution are given, largest surface F as well as largest integral of mean curvature M. The conic frustum is the only extremal body. For small l, the situation is intricated and has not yet been clarified.

[3] Vgl. Abb. 4.

[4] Das günstige Intervall für l kann sicher in beiden Problemen noch etwas ausgedehnt werden, so im (F, V)-Problem bis in die nächste rechtsseitige Umgebung von $l = 1$, und zwar für alle zulässigen V, bis $l = 2/\sqrt{5}$ aber nur noch für kleine zulässige V.

[5] In beiden Problemen besitzt die *Kegelstumpfkurve* im zulässigen Intervall genau eine *Wendestelle*. Dieser Umstand kann bequem zur Gewinnung einer unscharfen Schranke für F bzw. M ausgenützt werden.

[6] Im (F, V)-Problem besitzen nach meinen Wahrnehmungen für $l < 2/\sqrt{5}$ gewisse *Doppelkegelstümpfe* die Extremaleigenschaft, allerdings nur für kleines V. Für grosses Volumen ist dagegen der *Zylinderkegel* im Intervall $0 \leqslant l < 1+\varepsilon$ (ε klein) jedenfalls extremal. Die vorliegenden Verhältnisse sind noch nicht restlos abgeklärt.